לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול 5

נושאי התרגול:

- אריתמטיקה של עוצמות.

אריתמטיקה של עוצמות

- נגדיר פעולות אריתמטיות על שתי עוצמות α, β.
- לשם כך נשתמש בשתי קבוצות זרות A, B כך שמתקיים $|B| = \beta$, $|A| = \alpha$.

יק לזיך
האיחוד

הגדרת הפעולות:

1. $\alpha + \beta = |A \cup B|$
2. $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$
3. $\alpha^{\beta} = |A^{B}|$

יק לזיך האכלה

משפט:

כאשר לפחות אחת מהקבוצות היא אינסופית ושתי העוצמות אינן 0 מתקיים:

$$\alpha \cdot \beta = max(\alpha, \beta) \quad , \quad \alpha + \beta = max(\alpha, \beta)$$

הגדרת היחסים:

1. $\alpha = \beta \qquad |A| = |B|$
2. $\alpha \leq \beta \qquad |A| \leq |B|$
3. $\alpha < \beta \qquad |A| < |B|$

שוויונות:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0 = \alpha$
4. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
6. $\alpha \cdot 1 = \alpha$
7. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
8. $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$
9. $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$
10. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

$$|A^{B \cup C}| = |A^{B} \times A^{C}|$$

משפט: אם α עוצמה אינסופית ו- $2 \leq \beta \leq 2^{\alpha}$ אז $\beta^{\alpha} = 2^{\alpha}$.

שרון גל

מסקנות מכל הנאמר עד כה:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph + \aleph = \aleph$
- $\aleph + \aleph_0 = \aleph$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$
- $\aleph \cdot \aleph = \aleph$
- ${\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
- ${\aleph_0}^{\aleph} = 2^{\aleph}$
- $\aleph^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
- $\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$

תרגיל 1:

הוכיחו או הפריכו לפי אריתמטיקה של עוצמות:

א. $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$

ב. $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{Q}|$

ג. $|P(P(\mathbb{Q}))| < |P(\mathbb{R})|$

א. הוכחה

בדק א'

$$\boxed{\aleph^{\aleph_0}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \underset{\text{חוק חזקות}}{=} 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \underset{\max}{=} 2^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$$

בדק ב'

$$\boxed{\aleph^{\aleph_0}} \underset{\text{משפט}}{=} 2^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$$

משפט: אם α עוצמה אינסופית ו- $2 \le \beta \le 2^{\alpha}$ אז $\beta^{\alpha} = 2^{\alpha}$.

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \dots = 17^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$$

ב. $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{Q}|$

הוכחה:

$$\boxed{|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}|} = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = \aleph^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$$

$$\boxed{|\mathbb{R} \times \mathbb{Q}|} = |\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{Q}| = \aleph \cdot \aleph_0 = \boxed{\aleph}$$

ג. $|P(P(\mathbb{Q}))| < |P(\mathbb{R})|$

הפרכה:

$$\boxed{|P(P(\mathbb{Q}))|} = 2^{(2^{\aleph_0})} = \boxed{2^{\aleph}}$$

$$\boxed{|P(\mathbb{R})|} = 2^{|\mathbb{R}|} = \boxed{2^{\aleph}}$$

אין קיבוץ בחזקות

$$a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$$

תרגיל 2:

הוכיחו: $\aleph = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$

אי - רציונליים

פעולת החיסור אינה מוגדרת בעוצמות אינסופיות

"$\aleph_0 - \aleph_0$"

$|\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}| = 0$

"$\aleph_0 - \aleph_0$"

$|\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{odd}| = \aleph_0$

הוכחה:

* יהי $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
* הקב' $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ זרות לכן

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$$

$$\aleph = \aleph_0 + |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$$

לפחות אחת העוצמות אינסופית (בסכום)

$$\aleph = \max(\aleph_0, |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|)$$

* אבל $\aleph > \aleph_0$ לכן בהכרח $\boxed{\aleph = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|}$

B^A = קב' כל הפונקציות המלאות מ-A ל-B

תרגיל 3:

א. מהי עוצמת כל הפונקציות המלאות מהטבעיים לטבעיים?

ב. מהי עוצמת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות?

ג. מהי עוצמת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים?

א. $\boxed{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|} = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$

סדרה אינסופית היא בעצם פונקציה מלאה מהטבעיים (האינדקסים) לקב' שמאמנה לקוחים איברי הסדרה

$a_0 = 1$ $a_1 = 3.7$ $a_2 = -4.03$ (לא של סדרה של ממשיים)

ב. כן בעצם עוצמת כל הפונק' המלאות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\{0,1\}$.

$\boxed{|\{0,1\}^{\mathbb{N}}|} = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$

ג. $\boxed{|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|} = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \boxed{\aleph}$

תרגיל 4:

הביעו את העוצמות הבאות רק בעזרת 2-ים ועד מופע יחיד של $\aleph_0$. הוכיחו את תשובתכם.

(שאלה מאמרון)

א. $\aleph^{\aleph}$

ב. $\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}$

ג. $|\{f: P(\mathbb{N}) \to P(P(\mathbb{N}))\}|$ (פונקציות מלאות בלבד).

ד. $|\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3\} \times \cdots|$

$|\{f \mid f: P(\mathbb{N}) \to P(P(\mathbb{N})) \wedge f \text{ is total}\}|$

א. $\boxed{\aleph^{\aleph}} = 2^{\aleph} = \boxed{2^{(2^{\aleph_0})}}$

ב. $\boxed{\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})}} = \aleph_0^{(2^{\aleph_0})} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph} = \boxed{2^{(2^{\aleph_0})}}$

ג. $\boxed{|P(P(\mathbb{N}))^{P(\mathbb{N})}|} = |P(P(\mathbb{N}))|^{|P(\mathbb{N})|} = (2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph} = \boxed{2^{(2^{\aleph_0})}}$

ד. $|A| = |\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3\} \times \cdots|$

כיון: זו מכפלה קרטזית אינסופית של קב' בעלת עוצמה (סופית). לדוגמה, אין סדירות לפעולה זו לכן נתשוב על כיוון אחר

* כל איבר ב- A הוא סדרה אינסופית של טבעיים עם מקבלות מסוימות (הראשון רק 0 או 1, השני רק 0,1,2 וכו').
* מכאן ש- $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (אולי בקב' כל הסדרות האינסופיות של טבעיים). לכן אצלנו $|A| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \ldots = \aleph$
* כמו כן קב' הסדרות הבינאריות האינסופיות מוכלת ב- A לכן $|A| \ge |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \aleph$
* לפי קשב $|A| = \aleph = \boxed{2^{\aleph_0}}$.

תרגיל 5:

א. מהי עוצמת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים שמתכנסות למספר סופי? ← A

ב. מהי עוצמת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים המתכנסות ל-0? ← B

ג. מהי עוצמת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים שלא מתכנסות למספר סופי? ← C

א: מצד אחד, $A \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}_{\text{כל הסדרות האינסופיות של ממשיים.}}$, לכן $\boxed{\aleph \le |A|}$

מצד שני, קב' הסדרות הקבועות שמוכלות ב-A (בגרור שהן מתכנסות)

נגדיר $f:\mathbb{R}\to A$ באופן הבא $f(r)=(r,r,r,\dots)$

ברור ש- f חח"ע לכן $\boxed{|A| \ge \aleph}$

לפי קשר $\boxed{\aleph = |A|}$

ב: מצד אחד, $B \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}_{\text{כל הסדרות האינסופיות של ממשיים.}}$, לכן $\boxed{\aleph \le |B|}$

מצד שני, קב' הסדרות מהצורה $r,0,0,0,\dots$ מוכלת ב-B. (בגרור שהן מתכנסות ל-0)

נגדיר $f:\mathbb{R}\to B$ באופן הבא $f(r)=(r,0,0,\dots)$

ברור ש- f חח"ע לכן $\boxed{|B| \ge \aleph}$

לפי קשר $\boxed{\aleph = |B|}$

ג. מהי עוצמת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים שלא מתכנסות למספר סופי? ← ב

ב * מצד אחד, $\underbrace{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}_{\text{כל הסדרות האינסופיות של ממשיים.}} \supseteq C$, לכן $\boxed{\aleph \geq |C|}$

* מצד שני, קב' הסדרות מהצורה (בכוכב שהן לא מתכנסות)

* נשתמש $f:\mathbb{R}\to C$ באופן הבא $f(r)=(r,r+1,r,r+1,\dots)$

* ברור ש- f חח"ע לכן $\boxed{|C| \geq \aleph}$

* לפי קשר $\boxed{\aleph = |C|}$

(א)

כל הסדרות האינסופיות

מתכנסות (א) | לא

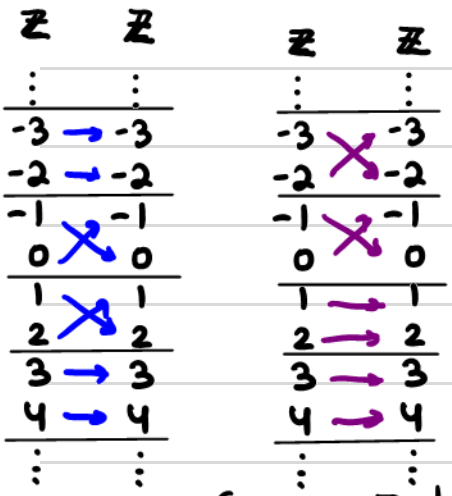
- סדרה ג' הינו משלים של סדרה א' אבל לא לא עונה.

שאלה ממבחן
מ - 2022
שווה 20 נק'

תרגיל 6:

מה העוצמה של $\underbrace{\text{קבוצת}}_{A}$ פונקציות השקילות (bijections) $f:\mathbb{Z}\leftrightarrow\mathbb{Z}$? הוכיחו את תשובתכם.

* מצד אחד $A\subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ לכן $|A|\le \aleph$
* נגדיר את B להיות קב' הפונקציות מהצורה הבאה: כל מס' אי-זוגי והעוקב (הגדול) שלו עוברים לעצמם או אחד לשני.



פורמלית:

$$B=\{f\in\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \mid \forall n\in\mathbb{Z}_{odd}\ ((f(n)=n \wedge f(n+1)=n+1)\vee(f(n)=n+1 \wedge f(n+1)=n))\}$$

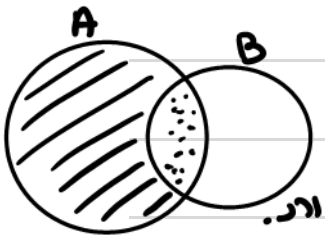
* $B\subseteq A$: כל $f\in B$ היא פש'. ניתן להוכיח לפי תכונת או להראות שהיא הפיכה (הופכית של עצמה!) ....
* עוצמת B היא $\aleph=2^{\aleph_0}$ מכיוון ש-$|\mathbb{Z}_{odd}|=\aleph_0$ ועבור כל איבר יש 2 אפשרויות.
* לכן $|A|\ge\aleph$
* לפי קשב' $\boxed{|A|=\aleph}$.

תרגיל 7:

א. הגדירו קבוצה סופית לא ריקה A, כך שמתקיים: $P(P(A)) = A \cup P(A) \cup P(P(A))$.

הסבירו מדוע הקבוצה A אכן מקיימת את הדרישה.

ב. הוכיחו כי עבור כל שתי קבוצות אינסופיות A ו-B, כך ש- $|A| > |B|$, מתקיים: $|A \setminus B| = |A|$.



ג. לכך ... 😄

ב. * בגלל ש- $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

* מהצ' $\cap, \setminus$ בגלל ש- $A\setminus B$, $A\cap B$ זרות.

$|A| = |A\setminus B| + |A\cap B|$

$|A| = \max(|A\setminus B|, |A\cap B|)$ ♡

בגלל שלפחות אחת מהקב' בסכום אינטופית אחרת (אם שתיהן סופיות) אז A היתה סופית בסתירה להנחה.

* יבוא ש- $A\cap B \subseteq B$ לכן $|A| > |B| \geq |A\cap B|$ נתון ♡♡

מ- ♡ ו- ♡♡ נובע שבהכרח $|A| = |A\setminus B|$